

TD 37-38 : Séries, familles sommables

Séries à termes positifs

Exercice 1. Déterminer la nature des séries suivantes :

$$\begin{array}{llll} 1) \sum_{n \geq 0} \frac{2 + (-1)^n}{3^n} & 4) \sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n} & 7) \sum_{n \geq 1} \ln \left(\frac{n^2 + 3n + 2}{n^2 + 3n} \right) & 10) \sum_{n \geq 1} \frac{n}{(n-1)!} \\ 2) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt[4]{n}} & 5) \sum_{n \geq 1} \frac{\ln n}{n^2} & 8) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 - \ln n} & 11) \sum_{n \geq 2} \frac{(\ln n)^n}{n^{\ln n}} \\ 3) \sum_{n \geq 2} \frac{1}{\binom{n}{2}} & 6) \sum_{n \geq 0} \frac{n^2}{3^n} & 9) \sum_{n \geq 2} \frac{\sqrt{1+n^2}}{n^3 (\ln n)^3} & 12) \sum_{n \geq 2} \frac{\text{ch}(n)}{\text{ch}(2n)} \end{array}$$

Exercice 2. Montrer la convergence et calculer la somme des séries suivantes :

$$\begin{array}{llll} 1) \sum_{n \geq 2} \frac{2^n}{3^{n-2}} & 2) \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2 - 1} & 3) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 + 2n} & 4) \sum_{n \geq 1} \ln \left(1 + \frac{2}{n(n+3)} \right) \end{array}$$

Exercice 3. Soit $\varphi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ une fonction strictement croissante. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\varphi(n)}{n^2}$ diverge.

Exercice 4. Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs. Montrer que si $\sum u_n$ converge, alors il en va de même des séries $\sum \ln(1 + u_n)$, $\sum u_n^2$, et $\sum \sqrt{u_n u_{n+1}}$.

Exercice 5. Par une comparaison série-intégrale, montrer que la série $\sum_{k \geq 2} \frac{1}{k \ln(k)}$ est divergente.

Exercice 6 (*). Étudier, selon la valeur de $p \in \mathbb{N}$, la nature de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ avec $u_n = \frac{1! + 2! + \dots + n!}{(n+p)!}$.

Séries à termes quelconques

Exercice 7. Déterminer la nature des séries de terme général suivants :

$$\begin{array}{llll} 1) \frac{\sin n}{n^2 + 1} & 3) \frac{\cos(n\pi)}{n} & 5) \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n - e & 7) \sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1 \\ 2) (-1)^n \frac{\ln n}{n} & 4) \sin \left(\frac{(-1)^n}{n^2} \right) & 6) \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right) & 8) \sin \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) - \frac{1}{\sqrt{n}} \end{array}$$

Exercice 8. Montrer que $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{8^n}{(2n)!}$ est un réel négatif.

Exercice 9.

- 1) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge.
- 2) Montrer que $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.
- 3) Démontrer que $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n\sqrt{n}} \right)$.
- 4) En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ diverge. Est-ce qu'il y a une contradiction avec la question 2 ?

Exercice 10 (Formule de Stirling). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $u_n = \frac{n!e^n}{n^n}$ et $w_n = \frac{u_n}{\sqrt{n}}$.

- 1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\ln u_{n+1} - \ln u_n = \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

- 2) En déduire la nature de la série de terme général $v_n = \ln w_{n+1} - \ln w_n$.
- 3) En déduire que

$$\exists M > 0 \quad n! \sim M\sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Par les intégrales de Wallis, on déduit¹ que $M = \sqrt{2\pi}$ et on obtient la formule de Stirling : $n! \sim \sqrt{2n\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n$

Familles sommables

Exercice 11. Montrer que $\sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=m}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^3}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

Exercice 12. En utilisant le fait que $n+1 = \sum_{m=0}^n 1$, calculer la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)3^{-n}$.

Exercice 13. Montrer que :

- 1) la famille $\left(\frac{1}{n!} \left(\frac{1}{2}\right)^m\right)_{(n,m) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable.
- 2) la famille $\left(\frac{1}{x^2}\right)_{x \in \mathbb{Q} \cap [1, +\infty[}$ n'est pas sommable.
- 3) la famille $\left(\frac{1}{(n+m)^3}\right)_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable.
- 4) $\left(\frac{1}{n^2 + m^2}\right)_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ n'est pas sommable.

Exercice 14. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On pose

$$u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^\alpha (n-k)^\alpha}$$

Pour quelles valeurs de α est-ce que la série $\sum u_n$ converge ?

1. En notant W_n l'intégrale de Wallis, à partir du DM, on a :

$$1 = \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{W_{2p+1}}{W_{2p}} = \lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{p\pi} \times \frac{2p}{2p+1} \times \left(\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p)!} \right)^2 \right) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{p\pi} \times \left(\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p)!} \right)^2 \right)$$

et en réinjectant l'équivalent obtenu en question 3, on trouve $M = \sqrt{2\pi}$.